الدالة اللوغاريتمية

الدالة اللوغاريتمية للأساس أ هي دالة على الصورة: د(س) = لو$_{أ}$ س وتقرأ لوغاريتم س للأساس أ .

فمثلا : لو$_{٢}$ ٨ تقرأ: لوغاريتم ٨ للأساس ٢

هام :

لا معني للحديث عن لوغاريتم عدد غير موجب حيث أن : لو$_{أ}$ ـ٥ ، لو$_{أ}$ صفر **لا معني له**

أي أن :

إذا كان أ ∈ ح$^{+}$ - {١} فإن الدالة د : ح$^{+}$ ← ح حيث د (س) = لو$_{أ}$ س تسمى بالدالة اللوغاريتمية.

يشترط أن :

(١) س > ٠

(٢) ممنوع أن تكون أ

عدد سالب أو ١ أو صفر

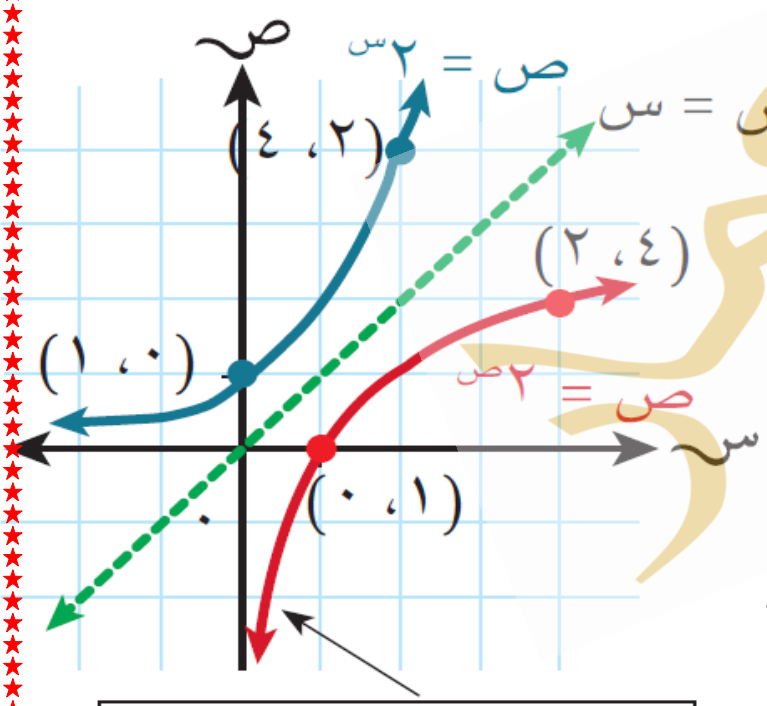
أ > ٠ ، أ ≠ ١

(٣) مجال الدالة اللوغاريتمية هو س > ٠

" مدي الدالة الأسية "

(٤) مدي الدالة اللوغاريتمية هو ح

" مجال الدالة الأسية "



تقترب قيم س من الصفر
مع تناقص قيم ص

قواعد هامة

(١) $\log_{أ} أ = ١$

(٢) $\log_{أ} ١ = ٠$

(٣) $\log_{أ} س^{ب} = ب \log_{أ} س$

وبالتالي: $\log_{أ} \left(\frac{١}{س}\right) = - \log_{أ} س$

تنبيه هام :

الدالة اللوغاريتمية هي الدالة العكسية للدالة الأسية

$$س = أ^{ص} \iff ص = \log_{أ} س$$

فمثلا : $ص = \log_{٤} ٦٤ \iff ٤^{ص} = ٦٤$

مثال (١) حول كلا مما يلي إلي الصورة اللوغاريتمية

أ) $٤^{-\frac{٣}{٢}} = \frac{١}{٨}$

ب) $\left(\frac{٣}{٥}\right)^{٤} = \frac{٨١}{٦٢٥}$

ج) $١٠^{-٢} = ٠,٠١$

الحل

أ) $\log_{٤} \frac{١}{٨} = -\frac{٢}{٣}$

ب) $\log_{\frac{٣}{٥}} \left(\frac{٨١}{٦٢٥}\right) = ٤$

ج) $\log_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

مثال (٢) حول كلا مما يلي إلي الصورة الأســـية

أ) $\log_{٢} ٨ = ٣$ ب) $\log_{١٠} \frac{١}{١٠٠} = -٢$ ج) $\log_{٥} ١ = ٥$

الحل

أ) $٢^{٣} = ٨$ ب) $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ ج) $١^{٥} = ٥$

تدريب ا

(١) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة

أ) $٢^{٧} = ١٢٨$ ب) $(\sqrt{٢})^{١٠} = ٣٢$ ج) $(\frac{٢}{٣})^{-٢} = \frac{٩}{٤}$

(٢) حول كل مما يأتي إلى الصورة الأسية:

أ) $\log_{٢\sqrt{٢}} ٣٢ = ١٠$ ب) $\log_{٣} \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ ج) $\log_{\frac{١}{٢}} ١ =$ صفر

اللوغاريتم المعتاد

في اللوغاريتم $\log_{أ}$ س إذا كان أ = ١٠ فإننا نكتب $\log_{١٠}$ س = لو س

هذا يحدث فقط إذا كان أ = ١٠

مثال (٣) أوجد قيمة كلا مما يلي :

أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ لو ١ ٠٠٠,٠

أ بوضع ص = لو ١ ٠٠٠,٠

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ١ ٠٠٠,٠ = -٣

ب لو $\sqrt[٤]{٢٧}$ ٣

ب بوضع ص = لو $\sqrt[٤]{٢٧}$ ٣

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

ص = $\frac{٣}{٤}$

لذا فإن لو $\sqrt[٤]{٢٧}$ ٣ = $\frac{٣}{٤}$

مثال (٤) أوجد قيمة مايلي :

① لو ٦٤ ٢ ② لو ١ ٦ ③ لو $\sqrt[٤]{٢}$ ٤ ④ لو $\sqrt[٣]{\frac{١}{٢٧}}$ ٣ ⑤ لو ٠,٠٠٠١

الحل

① بفرض أن : لو ٦٤ ٢ = س

∴ ٢^س = ٦٤ ∴ ٢^س = ٢^٦

∴ س = ٦

∴ لو ٦٤ ٢ = ٦

② بفرض أن : لو$_{٦}$ ١ = س ∴ ٦^{س} = ١ ∴ ٦^{س} = ٦^{٠} ∴ س = صفر

∴ لو$_{٦}$ ١ = صفر

③ بفرض أن : لو$_{٤}$ $\sqrt{٢}$ = س ∴ ٤^{س} = $\sqrt{٢}$ ∴ ٢^{٢س} = ٢$^{\frac{٥}{٢}}$

∴ ٢س = $\frac{٥}{٢}$ ∴ س = $\frac{٥}{٤}$ ∴ لو$_{٤}$ $\sqrt{٢}$ = $\frac{٥}{٤}$

④ بفرض أن : لو$_{\sqrt{٣}}$ $\frac{١}{٢٧}$ = س ∴ $(\sqrt{٣})^{س}$ = $\frac{١}{٢٧}$ ∴ ٣$^{\frac{١}{٢}س}$ = ٣$^{-٣}$

∴ $\frac{١}{٢}$ س = −٣ ∴ س = −٦ ∴ لو$_{\sqrt{٣}}$ $\frac{١}{٢٧}$ = −٦

⑤ بفرض أن لو ٠,٠٠٠١ = س ∴ ١٠^{س} = ٠,٠٠٠١ = ١٠$^{-٤}$

∴ س = −٤ ∴ لو ٠,٠٠٠١ = −٤

مثال (٥)

أوجد قيمة س إذا كان :

١ لو$_{٢}$ س = −٤ ٢ لو$_{٩}$ $\sqrt{٨١}$ = س ٣ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = −٣ ٤ لو$_{س}$ ٨ = ٦

الحل

① ∵ لو$_{٢}$ س = −٤ ∴ س = ٢$^{-٤}$ ∴ س = $\frac{١}{٢^{٤}}$ = $\frac{١}{١٦}$

② ∵ لو$_{٩}$ $\sqrt{٨١}$ = س ∴ ٩^{س} = $\sqrt{٨١}$ ∴ ٣^{٢س} = ٣$^{\frac{١}{٢}}$ × ٣^{٤}

∴ ٣^{٢س} = ٣$^{\frac{٩}{٢}}$ ∴ ٢ س = $\frac{٩}{٢}$ ∴ س = $\frac{٩}{٤}$

③ ∵ لو$_{\frac{١}{٢}}$ س = −٣ ∴ س = $(\frac{١}{٢})^{-٣}$ = ٢^{٣} ∴ س = ٨

④ ∵ لو$_{س}$ ٨ = ٦ ∴ س^{٦} = ٨ ∴ س^{٦} = ٢^{٣}

∴ س = (٢^{٣})$^{\frac{١}{٦}}$ ∴ س = ٢$^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س = $\sqrt{٢}$

مثال (٦) إذا علمت أن الدالة د معرّفة كما يأتي د: س ← ١ + لـو٢ (س - ٣) حيث س ∈ ع، س > ٣، فأوجد د$^{-١}$(س).

الحل

ص = ١ + لو٢ (س ــ ٣)

س = ١ + لو٢ (ص ــ ٣)

س ــ ١ = لو٢ (ص ــ ٣)

$٢^{س ــ ١}$ = ص ــ ٣

$٢^{س ــ ١}$ + ٣ = ص

د$^{-١}$(س) = $٢^{س ــ ١}$ + ٣

لتعيين مجال الدالة د (س) = لو$_{أ}$ س

هو المجال المشترك بين كلا من :

- س > ٠
- أ > ٠
- ويستبعد القيمة التي تجعل أ = ١

فمثلا : مجال الدالة قيمة لو$_{س ــ ٢}$ س + ٣

س ــ ٢ > ٠ ، س + ٣ > ٠ ، س ــ ٢ ≠ ١

س > ٢ ، س > ــ ٣ ، س ≠ ٣

∴ المجال المشترك هو س > ٢ ، س ≠ ٣

مثال (٧) أوجد مجال الدوال الآتية :

(١) د(س) = لو$_{٤}$ (٤ ـ س)　　(٢) د(س) = لو$_{٥}$ $\frac{١}{\text{س}}$

(٣) د(س) = لو$_{\text{س}}$ (س ـ ٣)　　(٤) د(س) = لو$_{\text{س}}$ $\frac{٢}{\text{س}}$

الحل

① الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن : ٤ − س > ٠

∴ المجال هو س < ٤

② الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$$\left.\begin{array}{l} ١ - \text{س} > ٠ \\ ١ - \text{س} \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى تحقق } \left\{\begin{array}{l} \text{س} < ١ \\ \text{س} \neq ٠ \end{array}\right.$$

∴ المجال هو س < ١ ، س ≠ ٠

تذكر أن :

الدالة د : د (س) = لوم س

معرفة لجميع قيم س ، م

التى تحقق أن : $\left\{\begin{array}{l} \text{س} > ٠ \\ \text{م} > ٠ \\ \text{م} \neq ١ \end{array}\right.$

③ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$$\left.\begin{array}{l} \text{س} > ٠ \\ \text{س} - ٣ > ٠ \\ \text{س} - ٣ \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى تحقق أن } \left\{\begin{array}{l} \text{س} > ٠ \\ \text{س} > ٣ \\ \text{س} \neq ٤ \end{array}\right.$$

∴ المجال هو س > ٣ ، س ≠ ٤

④ الدالة معرفة لجميع قيم س التى تحقق أن

$$\left.\begin{array}{l} \text{س} > ٠ \\ ٢ - \text{س} > ٠ \\ ٢ - \text{س} \neq ١ \end{array}\right\} \text{ أى تحقق أن } \left\{\begin{array}{l} \text{س} > ٠ \\ \text{س} < ٢ \\ \text{س} \neq ١ \end{array}\right.$$

∴ المجال هو ٠ < س < ٢ ، س ≠ ١

مثال (٨)

أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١ لو$_{س}$ ٧ س = ٢

٢ لو$_{٣}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = -٢

٣ لو$_{٣}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٧ س + ٢١) = ١

٤ (لو$_{٣}$ س)^{٢} - ٣ لو$_{٣}$ س = ٤

الحل

① ∵ لو$_{س}$ ٧ س = ٢ ∴ س^{٢} = ٧ س

∴ س^{٢} - ٧ س = ٠ ∴ س (س - ٧) = ٠

∴ إما س = ٠ (مرفوض) أ، س = ٧ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٧}

② ∵ لو$_{٢}$ (س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س) = -٢ ∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = ٢$^{-٢}$

∴ س^{٢} + $\frac{٣}{٤}$ س = $\frac{١}{٤}$ ∴ ٤ س^{٢} + ٣ س - ١ = ٠

∴ (س + ١) (٤ س - ١) = ٠ ∴ س = -١ (يحقق) أ، س = $\frac{١}{٤}$ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {-١ ، $\frac{١}{٤}$}

③ ∵ لو$_{٣}$ لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٧ س + ٢١) = ١ ∴ لو$_{٣}$ (س^{٢} - ٧ س + ٢١) = ٣^{١} = ٣

∴ س^{٢} - ٧ س + ٢١ = ٣^{٢} = ٩ ∴ س^{٢} - ٧ س + ١٢ = ٠

∴ (س - ٣) (س - ٤) = ٠ ∴ إما س = ٣ (يحقق) أ، س = ٤ (يحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٤}

④ ∵ (لو$_{٢}$ س)^{٢} - ٣ لو$_{٢}$ س - ٤ = ٠ ∴ (لو$_{٢}$ س - ٤) (لو$_{٢}$ س + ١) = ٠

∴ إما لو$_{٢}$ س = ٤ ∴ س = ٢^{٤} = ١٦ (يحقق) أ، لو$_{٢}$ س = -١

∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$ (يحقق) ∴ مجموعة الحل = {١٦ ، $\frac{١}{٢}$}

مثال (٩) كتاب الطالب رقم ٧ حل كلا من المعادلات الآتية

(١) $\log_{٢}(\log_{٣} س) = -١$

$\log_{٣} س = ٢^{-١}$

$\log_{٣} س = ٠,٥$

$س = ٣^{٠,٥} = \sqrt{٣}$

(٢) $\log_{٤}(٣ - ٥س)^{٢} = س^{٢}$

$٤س^{٢} = (٣ - ٥س)^{٢}$

$٢س^{٢} = (٣ - ٥س)^{٢}$

$٢س^{٢} = ٣ - ٥س$

$٢س^{٢} + ٥س - ٣ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٣) = ٠$

$س = ٠,٥$ $س = -٣$

مثال (١٠) حل المعادلات اللوغاريتمية :

١) $\log_{س} ١٢٥ = ٣$

∴ $س^{٣} = ١٢٥$ بأخذ الجذر التكعيبي

∴ $س = ٥$

٢) $\log_{٢} س = ١$

∴ $٢^{١} = س$

∴ $س = ٢$

تدريب ٢ أوجد قيمة س فيما يلي :

أ) $\log_{٣} س = ٢$ ب) $\log_{٥} س = -٣$ ج) $\log_{٢} ١٦ = س$

د) $\log_{١٠} \sqrt[٣]{١٠} = \frac{س}{٦}$ هـ) $\log_{٨} ٢ = س$ و) $\log_{٨} س = ١$

ح) $\log_{٥} ٦٢٥ = س$ ط) $\log_{٣} س = \frac{٢}{٣}$ ي) $\log_{س} ٥ = ٣$

تدريب ٣ أوجد قيمة س فيما يلي :

① $\log_{٣} ٨١ = س$ «٤»	② $\log_{٣} \frac{١}{٢٧} = س$ «-٣»
③ $\log_{٢٧} ١ = س^{٣}$ «صفر»	④ $\log_{\frac{٥}{٢}} \frac{١٦}{٦٢٥} = س$ «-٤»
⑤ $\log_{\sqrt{٨}} ٦٤ = س$ «٤»	⑥ $\log_{٤} \sqrt{٨} = س$ «$\frac{٧}{٤}$»

تدريب ٤ اختر من بين الإجابات المتعددة

(١) قيمة $\log_{٤} ٢$ = ...

☐ ٢ ☐ ٠,٥ ☐ ٤ ☐ ١

(٢) إذا علمت أن $\log_{٩} ٣$ = س ـ ٢ أوجد قيمة س ؟

☐ ١ ☐ ١,٥ ☐ ٢ ☐ ٢,٥

(٣) ما ناتج المقدار $\log_{٥} ٣ + \log_{٧} ١$

☐ ٥ ☐ ٨ ☐ ١٥ ☐ ٣

(٤) منحني الدالة د : د (س) = $\log_{٢}$ (س + ١) يقطع محور السينات في النقطة .....

☐ (٠ ، ٠) ☐ (٠ ، ١) ☐ (٠ ، ٢) ☐ (١ ، ١)

(٥) إذا كان د (س) = ٣س فإن $د^{-١}$ (س) = ...

☐ $\log_{س} ٣$ ☐ $\log_{٣} س$ ☐ $س^{-٢}$ ☐ $٣^{س}$

(٦) د (س) = $\log_{٣}$ (س + ٤) فإن $د^{-١}$ (٢) = ...

☐ $\log_{٦} ٣$ ☐ $\log_{٣} ٦$ ☐ ٦ ☐ ٥

(٧) د (س) = $\log_{٢}$ (س + ك) فإن $د^{-١}$ (٣) = ١ فإن ك = ...

☐ ٤ ☐ ٥ ☐ ٦ ☐ ٧

(٨) منحني الدالة د (س) = لو٢ (٣ ــ س) يقطع محور السينات في النقطة .....

☐ (١ ، ٠) ☐ (٢ ، ٠) ☐ (٠ ، ١) ☐ (٠ ، ٣)

(٩) إذا كان لو٢ د (س) = س فإن ٨ د (٢) + د (ــ ٣) + د (٠) = ...

☐ $\frac{١}{٨}$ ☐ $\frac{١}{١٦}$ ☐ ١١ ☐ ٢٢

(١٠) إذا كان المنحني ص = لو٤ (١ ــ أ س) يمر بالنقطة ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{-١}{٢}$) فإن أ تساوي

☐ ٢ ☐ ٣ ☐ ٤ ☐ ٨

(١١) إذا كان لو ك $\sqrt[٣]{ص}$ = ٧ فما قيمة لو ك ص ؟

☐ ٧ ☐ $\frac{٧}{٣}$ ☐ ٧ × ٣ ☐ $(٧)^{٣}$

(١٢) إذا كان لو٢ د (س) = ن ــ س وكانت د(س) تمر بالنقطة (٢ ، ٨) فإن ن تساوي

☐ ٤ ☐ ٥ ☐ ٦ ☐ ٨

(١٣) إذا كانت لو س ص = ١٠٠٠ ، وكان لو٢ س = ١٠ ، فما قيمة ص ؟

☐ $١٠^{٢}$ ☐ $١٠٠^{٢}$ ☐ $١٠٠٠^{٢}$ ☐ $١٠٠٠٠^{٢}$

(١٤) إذا كانت لو أ س = ١٦ ، فما قيمة لو أ $\sqrt{س}$ ؟

☐ ٤ ☐ ١٦ ☐ ٣٢ ☐ ٨

تدريب ٥ أكمل مايلي

أ إذا كان لو$_{٣}$ س = ٢ فإن س = ...

ب إذا كان لو$_{أ}$ ١٦ = ٤ فإن أ ∋ .....

ج لو$_{٥}$ ١٢٥ = ...

د مجال الدالة د حيث د(س) = لو$_{(١-س)}$ ٣ هو .....

و إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ...

مثال (١٢)

أوجد قيم س الممكنة إذا كان لو$_{س}$ (س + ٢٠) = ٢

$س^{٢} = س + ٢٠$

$\therefore س^{٢} - س - ٢٠ = ٠$

$(س + ٤)(س - ٥) = ٠$

$س = -٤$ مرفوضة و $س = ٥$ تحقق المعادلة

لا تحقق المعادلة $\therefore س = ٥$

تدريب ٦ أوجد قيمة مايلي :

①	لو$_{٢}$ ١٦	«٤»	② لو$_{٣}$ ٣ «١»
③	لو$_{٨}$ ١	«صفر»	④ لو$_{٣}$ ٨١ «٤»
⑤	لو$_{١}$ ٠,٠٠٠١	«٥-»	⑥ لو$_{٤}$ $\sqrt{٢}$ ٢ «$\frac{٣}{٤}$»
⑦	لو$_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨	«٧-»	⑧ لو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ «٣-»
⑨	لو$_{٠,٢}$ ١٢٥	«٣-»	⑩ لو$_{\sqrt{٢}}$ ٨ «٧»
⑪	لو$_{\frac{٢}{٣}}$ $\frac{١}{١٦}$ ٥	«٤-»	⑫ لو$_{٣}$ $\sqrt[٤]{٢٧}$ «$\frac{٣}{٤}$»
⑬	لو$_{٣}$ جتا ٤٥°	«$\frac{١}{٢}$»	

تدريب ٧ أكمل ما يلي

① لو$_{٥}$ ١٢٥ = ... ، لو ١٠٠ = ...

② إذا كانت الدالة د : د (س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س فإن : د $\left(\frac{١}{٤}\right)$ = ...

، د (٨) = ...

③ مجال الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س هو ..... ومداها هو .....

④ العدد الذى لوغاريتمه للأساس ٥ يساوى ٤ هو .....

⑤ إذا كان لو$_{٣}$ س = ٤ فإن : س = ...

⑥ إذا كان لو$_{س-١}$ ٤٩ = ٢ فإن : س = ...

⑦ إذا كان لو$_{|س+٢|}$ ٦٤ = ٣ فإن : س = ...

⑧ منحنى الدالة د : د (س) = لو$_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨ ، .....)

تدريب ٨ اختر من بين الإجابات المتعددة

① الصورة لو$_{أ}$ س = ص تكافئ تمامًا الصورة .....

(أ) لو$_{أ}$ ص = س (ب) $أ^{ص}$ = س (جـ) $أ^{س}$ = ص (د) ص = $أ^{س}$

② مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ ٨١ = ٤ هى .....

(أ) {-٣} (ب) {٣} (جـ) {± ٣} (د) {٩}

③ مجموعة حل المعادلة : لو$_{س}$ (٣ س - ٢) = ٢ هى .....

(أ) {١ ، ٢} (ب) {١} (جـ) {٢} (د) ∅

④ مجموعة حل المعادلة : لو$_{(س+٣)}$ ١٢٥ = ٣ هى .....

(أ) {٥} (ب) {٣} (جـ) ∅ (د) {٢}

⑤ إذا كان : لو (س + ١١) = ٢ فإن : س = ...

(أ) -٩ (ب) ٢٢ (جـ) ٨٩ (د) ٩١

تدريب ٩ حل المعادلات الآتية

(١) $\log_{٢} س = ٧$ «١٢٨»

(٢) $\log_{\frac{١}{٣}} س = -١$ «٣»

(٣) $\log_{٥} س = -٢$ «$\frac{١}{٢٥}$»

(٤) $\log_{\sqrt{٣}} س = ٤$ «٩»

(٥) $\log_{٣} س^{٢} = ٤$ «± ٩»

(٦) $\log_{٨١} س = \frac{٣}{٤}$ «٢٧»

(٧) $\log_{٨١} ٣ س = \frac{١}{٤}$ «١»

(٨) $\log_{٠,٢} س = -٢$ «٢٥»

(٩) $\log_{٢} س^{-١} = -٥$ «٣٢»

(١٠) $\log_{\frac{١}{٢}} ٢ س = -٤$ «٤»

(١١) $\log_{٢} (\log_{٣} س) = ١$ «٩»

(١٢) $\log_{٣} (٢ س - ٥) = ٠$ «٣»

(١٣) $\log_{٦} \sqrt{س + ٤} = \frac{١}{٢}$ «٢»

(١٤) $\log_{٨} \sqrt[٣]{س^{٢} + ٤٨} = \frac{٢}{٣}$ «± ٤»

(١٥) $\log_{٣} \log_{٢} (٣ س - ١) = ١$ «٣»

(١٦) $\log_{٣} \log_{٢} (س^{٢} - ٢ س) = ١$ «٤ أ، -٢»

(١٧) $\log_{٥} |٢ س + ١| = ١$ «٢ أ، -٣»

(١٨) $\log_{٢} |س - ١| = -٣$ «$\frac{٩}{٨}$ أ، $\frac{٧}{٨}$»

(١٩) $\log_{٢} س (س + ٦) = ٤$ «٢ أ، -٨»

(٢٠) $\log_{٢} (س - ١)^{٢} = ٢$ «٣ أ، -١»

(٢١) $\log_{٣} (س^{٢} - ٢ س) = ١$ «٣ أ، -١»

(٢٢) $\log_{\sqrt{٥}} (س^{٢} - ١١ س - ١) = ٤$ «١٣ أ، -٢»

(٢٣) $(\log_{٣} س)^{٢} - ٩ \log_{٣} س + ٢٠ = ٠$ «٨١ أ، ٢٤٣»

(٢٤) $\log_{٢} س = \log_{٣} ٩$ «٤»

(٢٥) $\log_{٢} (٣ س - ٣ س^{-٢}) = ٣$ «٢»

(٢٦) $٣ \log_{٤} (س + ١,٢٥) = \frac{١}{٣}$ «-١»

(٢٧) $|\log_{١٠} س - ٢| = ٢$ «١٠^{-٤} أ، ١»

تدريب ١٠ حل المعادلات الآتية

(١) لو$_{س}$ ١٢٥ = ٣ «{٥}»

(٢) لو$_{س}$ ٢ = ٥ «{$\sqrt[5]{٢}$}»

(٣) لو$_{س}$ ٧ = $\frac{١}{٢}$ «{٤٩}»

(٤) لو$_{س}$ ٩ = $\frac{٢}{٥}$ «{٢٤٣}»

(٥) لو$_{س}$ ٣ = ٢- «{$\frac{١}{\sqrt{٣}}$}»

(٦) لو$_{س}$ ٠,٠٠١ = $\frac{٣-}{٤}$ «{١٠٠٠٠}»

(٧) لو$_{س}$ ٢٤٣ $\sqrt{٣}$ = ١١ «{$\sqrt{٣}$}»

(٨) لو$_{س}$ ٨١ = ٤ «{٣-}»

(٩) لو$_{س-١}$ ٢٧ = ٣ «{٤}»

(١٠) لو$_{س-١}$ (٧ - س) = ٢ «{٣}»

(١١) لو$_{\frac{٢}{س}}$ ٦٤ = ٣- «{٨}»

(١٢) لو$_{س}$ ٥ س = ٢ «{٥}»

(١٣) لو$_{س}$ ٦٤ س = ٤ «{٤}»

(١٤) لو$_{س}$ س^{٦} = ٥ س «{$\frac{٦}{٥}$}»

(١٥) لو$_{٩}$ لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٠ «{٣}»

(١٦) لو$_{س}$ (س^{٢} - ١٢) = ١ «{٤}»

(١٧) لو$_{س}$ (٢ س + ٨) = ٢ «{٤}»

(١٨) لو$_{س}$ $(\sqrt{س-٢}+٢)$ = ١ «{٣ ، ٢}»

(١٩) (لو$_{٣}$ س)^{٢} + ١٥ = ٨ لو$_{٣}$ س «{٢٧ ، ٢٤٣}»

قوانين اللوغاريتمات

القانون الأول : $\log_أ (س \times ص) = \log_أ س + \log_أ ص$

القانون الثاني : $\log_أ (س \div ص) = \log_أ س - \log_أ ص$

القانون الثالث : $\log_أ س = \log_أ ص$ فإن : $س = ص$

مثال١ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

① $\log_٣ ١٥ + \log_٣ ٦ - \log_٣ ١٠$

② $\log_٥ ١٠٠ - ٣ \log_٥ ٢ - \log_٥ ١٨ + \log_٥ ٣٦$

③ $\log_٥ \frac{٣}{٥} + ٢ \log_٥ \frac{١٥}{٢} - \log_٥ \frac{٥}{٣٦} + \log_٥ \frac{٥}{٢٤٣}$

④ $\log_٢ ٧ \times \log_٧ ١١ \times \log_{١١} ٩ \times \log_٣ ٢$

⑤ $\frac{\log_٣ ٢٤٣ - \log_٣ ٣٢}{\log_٢ ٢٧ - \log_٣ ٨}$

الحل

① المقدار $= \log_٣ \frac{١٥ \times ٦}{١٠} = \log_٣ ٩ = \log_٣ ٣^٢ = ٢ \log_٣ ٣ = ٢ \times ١ = ٢$

② المقدار $= \log_٥ ١٠٠ - \log_٥ ٢^٣ - \log_٥ ١٨ + \log_٥ ٣٦$

$= \log_٥ \frac{١٠٠ \times ٣٦}{١٨ \times ٨} = \log_٥ ٢٥ = \log_٥ ٥^٢ = ٢ \log_٥ ٥ = ٢ \times ١ = ٢$

③ المقدار $= \text{لو}_{٥} \frac{٣}{٥} + \text{لو}_{٥} \left(\frac{١٥}{٢}\right)^{٢} - \text{لو}_{٥} \frac{٥}{٣٦} + \text{لو}_{٥} \frac{٥}{٢٤٣}$

$= \text{لو}_{٥} \frac{\frac{٣}{٥} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{١٥}{٢} \times \frac{٥}{٢٤٣}}{\frac{٥}{٣٦}} = \text{لو}_{٥} \frac{٣ \times ١٥ \times ١٥ \times ٥ \times ٣٦}{٥ \times ٢ \times ٢ \times ٥ \times ٢٤٣} = \text{لو}_{٥} ٥ = ١$

④ المقدار $= \frac{\text{لو}\ ٧}{\text{لو}\ ٢} \times \frac{\text{لو}\ ١١}{\text{لو}\ ٧} \times \frac{\text{لو}\ ٩}{\text{لو}\ ١١} \times \frac{\text{لو}\ ٢}{\text{لو}\ ٣} = \frac{\text{لو}\ ٩}{\text{لو}\ ٣} = \frac{\text{لو}\ ٣^{٢}}{\text{لو}\ ٣} = \frac{٢\ \text{لو}\ ٣}{\text{لو}\ ٣} = ٢$

⑤ المقدار $= \frac{\text{لو}_{٣}\ ٣^{٥} - \text{لو}_{٣}\ ٢^{٥}}{\text{لو}_{٣}\ ٣^{٣} - \text{لو}_{٣}\ ٢^{٣}} = \frac{٥\ \text{لو}_{٣}\ ٣ - ٥\ \text{لو}_{٣}\ ٢}{٣\ \text{لو}_{٣}\ ٣ - ٣\ \text{لو}_{٣}\ ٢} = \frac{٥\ (\text{لو}_{٣}\ ٣ - \text{لو}_{٣}\ ٢)}{٣\ (\text{لو}_{٣}\ ٣ - \text{لو}_{٣}\ ٢)} = \frac{٥}{٣}$

مثال ٢: بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

(١) $\text{لو}_{٢} \frac{٣}{٢٥} + ٥\ \text{لو}_{٢}\ ٥ - \text{لو}_{٢} \frac{١٢٥}{١٢} + \text{لو}_{٢}\ ٢٧ - \text{لو}_{٢}\ ٢٤٣$

$\text{لو}_{٢} \frac{٣ \times (٥)^{٥} \times ١٢ \times ٢٧}{٢٥ \times ١٢٥ \times ٢٤٣} = \text{لو}_{٢}\ ٤ = \text{لو}_{٢}\ (٢)^{٢} = ٢\ \text{لو}_{٢}\ ٢ = ٢$

(٢) $٣\ \text{لو}_{٣}\ ٥ + \text{لو}_{٣} \frac{٢٤٣}{١٢٥}$

$٣\ \text{لو}_{٣}\ ٥ + \text{لو}_{٣}\ ٢٤٣ - \text{لو}_{٣}\ ١٢٥ = \text{لو}_{٣}\ (٥)^{٣} + \text{لو}_{٣}\ (٣)^{٥} - \text{لو}_{٣}\ (٥)^{٣} = ٥\ \text{لو}_{٣}\ ٣ = ٥$

(٣) $١ + \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٢ - \text{لو}\ ١٥$

$\text{لو}\ ١٠ + \text{لو}\ ٣ - \text{لو}\ ٢ - \text{لو}\ ١٥ = \text{لو} \frac{١٠ \times ٣}{١٥ \times ٢} = \text{لو}\ ١ = \text{صفر}$

مثال ٣: اختصر لأبسط صورة:

أ) $٢\text{لو}_{٢}٢٥ + \text{لو}_{٢}(\frac{١}{٥} + \frac{١}{٣}) + ٢\text{لو}_{٢}٣ - \text{لو}_{٢}٣٠$

ب) $\text{لو}_{٥}٤٩ \times \text{لو}_{٨}٥ \times \text{لو}_{٩}٨ \times \text{لو}_{٧}٩$

الحل

أ) المقدار $= \text{لو}_{٢}٢٥ + \text{لو}_{٢}\frac{٨}{١٥} + \text{لو}_{٢}٣^{٢} - \text{لو}_{٢}٣٠$

$= \text{لو}_{٢}(٢٥^{٢} \times \frac{٨}{١٥} \times ٣^{٢} \times \frac{١}{٣٠})$

$= \text{لو}_{٢}١٠٠ = ٢$

ب) المقدار $= \frac{\text{لو}_{٥}٤٩}{\text{لو}_{٥}} \times \frac{\text{لو}_{٨}٥}{\text{لو}_{٨}} \times \frac{\text{لو}_{٩}٨}{\text{لو}_{٩}} \times \frac{\text{لو}_{٧}٩}{\text{لو}_{٧}}$

$= \frac{\text{لو}_{٧}٤٩}{\text{لو}_{٧}} = \frac{٢\text{لو}_{٧}٧}{\text{لو}_{٧}} = ٢$

مثال ٤: أوجد مجموعة حل المعادلات

① $\text{لو}_{٢}س + \text{لو}_{٢}(س - ٢) = ٣$

② $\text{لو}_{٤}س + \text{لو}_{٤}(س + ١٢) = ٣$

الحل

① $\text{لو}_{٢}س(س - ٢) = ٣ \Leftarrow س^{٢} - ٢س = (٢)^{٣}$

$س^{٢} - ٢س = ٨ \Leftarrow س^{٢} - ٢س - ٨ = (س - ٤)(س + ٢) = ٠$

$\therefore س = ٤$ $\quad س = -٢$ (مرفوض) $\quad \therefore$ م.ح $= \{٤\}$

② $\text{لو}_{٤}س(س + ١٢) = ٣ \Leftarrow \text{لو}_{٤}(س^{٢} + ١٢س) = ٣$

$س^{٢} + ١٢س = (٤)^{٣}$

$س^{٢} + ١٢س - ٦٤ = (س - ٤)(س + ١٦) = ٠$

$\therefore س = ٤$ $\quad س = -١٦$ (مرفوض) $\quad \therefore$ م.ح $= \{٤\}$

مثال ٥ : أثبت أن

(١) ٣ لو ٥ + ٢ لو ٦ − لو ٩ + لو ٠,٢ = لو$_{٥}$ ٢٥

الطرف الأيمن = لو ٥^{٣} + لو ٦^{٢} − لو ٩ + لو $\frac{٢}{١٠}$

$$= \text{لو} \frac{٥^{٣} \times ٦^{٢} \times \frac{٢}{١٠}}{٩} = \text{لو} \frac{٢ \times ٣٦ \times ١٢٥}{١٠ \times ٩}$$

= لو ١٠٠ = لو ١٠^{٢} = ٢ لو ١٠ = ٢

، الطرف الأيسر = لو$_{٥}$ ٥^{٢} = ٢ لو$_{٥}$ ٥ = ٢

---

(٢) $\frac{\text{لو } ٣٠ - \text{لو } ٦ + \text{لو } ٥}{\text{لو } ١٢ - \text{لو } ٣ + \text{لو } ٢٥} = ١ - \text{لو } ٢$

(٢) الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } \frac{٣٠ \times ٥}{٦}}{\text{لو } \frac{١٢ \times ٢٥}{٣}} = \frac{\text{لو } ٢٥}{\text{لو } ١٠٠} = \frac{\text{لو}_{٥}\ ٥^{٢}}{\text{لو } ١٠^{٢}} = \frac{٢ \text{ لو}_{٥}\ ٥}{٢ \text{ لو } ١٠} = \text{لو}_{١٠}\ ٥$

، الطرف الأيسر = ١ − لو ٢ = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

مثال ٦ :

إذا كان : ٧لوس+٤ لوص – لوس^{٥} ص^{٢}=٢(لو٢+لو٣) إثبت أن س = $\frac{٦}{ص}$

الحل

لوس^{٧} + لوص^{٤} – لوس^{٥}ص^{٢} = ٢ لو ٦

لو $\frac{س^{٧} \times ص^{٤}}{س^{٥} \times ص^{٢}}$ = لو ٦^{٢} ⇐ لو س^{٢} ص^{٢} = لو ٣٦

س^{٢} ص^{٢} = ٣٦ ⇐ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{٦}{ص}$

حل المعادلات اللوغاريتمية

حل المعادلات الآتية

(١) $\log_{٥} س + \log_{٥} ٣ = \log_{٥} ٣٠$

$\log_{٥} ٣س = \log_{٥} ٣٠$

$\therefore ٣ س = ٣٠$

$\therefore س = ٦$

(٢) $\log_{٣} ٤س - \log_{٣} ٢ = \log_{٣} ٧$

$\log_{٣} (٤ س \div ٢) = \log_{٣} ٧$

$\therefore ٢ س = ٧$

$\therefore س = ٣,٥$

(٣) $\log_{٢} (٢ - س) + \log_{٢} ٩ = ٢ \log_{٢} ٨$

$\log_{٢} ٩ (٢ - س) = \log_{٢} ٦٤$

$\therefore ٩ (٢ - س) = ٦٤$

$\therefore ١٨ - ٩ س = ٦٤$

$٩ س = ١٨ - ٦٤$

$٩ س = ١٨ - ٦٤$

مرفوض $\therefore$ لا يوجد حلول

(٤) لـو$_{٢}$ (س^{٢} – ٢س) = ٣

س^{٢} – ٢ س = ٢^{٣} ، س^{٢} – ٢ س = ٨

س^{٢} – ٢ س – ٨ = ٠ (س – ٤) (س + ٢) = ٠

س = ٤ أ، س = – ٢ ∴ م.ع = { ٤ ، – ٢ }

(٥) لـو$_{\sqrt{٣}٢}$ (س^{٢} – س) = ٢

س^{٢} – س = ($\sqrt{٣}٢$)^{٢} ، س^{٢} – س = ١٢

س^{٢} – س – ١٢ = ٠ (س – ٤) (س + ٣) = ٠

س = ٤ أ، س = – ٣ ∴ م.ع = { ٤ ، – ٣ }

(٦) (لـو$_{٢}$س)^{٢} – ٥ لـو$_{٢}$ س + ٦ = ٠

(لـو$_{٢}$س – ٢)(لـو$_{٢}$ س – ٣) = ٠ ⇐ لـو$_{٢}$س = ٢ أ، لـو$_{٢}$ س = ٣

س = (٢)^{٢} = ٤ أ، س = (٢)^{٣} = ٨ ∴ م.ع = { ٤ ، ٨ }

(٧) (لـو$_{٢}$س)^{٢} – ٥ لـو$_{٢}$ س = ١٢

(لـو$_{٢}$س – ٤)(لـو$_{٢}$ س + ٣) = ٠ ⇐ لـو$_{٢}$س = ٤ أ، لـو$_{٢}$ س = – ٣

س = (٢)^{٤} = ١٦ أ، س = (٢)$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ∴ م.ع = { ١٦ ، $\frac{١}{٨}$ }

(٨) لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

∵ لـوس + لـو(س + ٢) = لـو(س + ٦)

∴ لـوس × (س + ٢) = لـو(س + ٦)

∴ س (س + ٢) = س + ٦

∴ $س^{٢}$ + ٢س − س − ٦ = ٠

∴ $س^{٢}$ + س − ٦ = ٠

∴ (س+٣) (س−٢) = ٠

∴ س = -٣ أو س = ٢

ولكن س = -٣ يرفض لأنه لا معنى للوغاريتم عدد سالب.

∴ س = ٢ هي القيمة الوحيدة التي تحقق المعادلة.

(٩) لـو$_{٣}$ | س + ٥ | = ٢

| س + ٥ | = $٣^{٢}$ ⇐ س + ٥ = ٩ أ، س + ٥ = − ٩

س = ٩ − ٥ أ، س = − ٩ − ٥

س = ٤ أ، س = − ١٤ ∴ م.ع = { ٤ ، − ١٤ }

(١٠) $(\text{لو}_{٢}\ س)^{٢} - \text{لو}_{٢}\ س = ٠$

$\text{لو}_{٢}\ س\ (\text{لو}_{٢}\ س - ١) = ٠ \Leftarrow \text{لو}_{٢}\ س = ٠$ أ، $\text{لو}_{٢}\ س - ١ = ٠$

$س = (١٠)^{٠} = ١$ أ، $س = (١٠)^{١} = ١٠$

$\therefore$ م . ح = { ١ ، ١٠ }

(١١) $\text{لو}_{٢}\ س + \text{لو}_{٢}\ (س - ٢) = ٣$

$\text{لو}_{٢}\ س\ (س - ٢) = ٣ \Leftarrow س^{٢} - ٢ س = (٢)^{٣}$

$س^{٢} - ٢ س = ٨ \Leftarrow س^{٢} - ٢ س - ٨ = (س - ٤)(س + ٢) = ٠$

$\therefore س = ٤$ $س = -٢$ (مرفوض) $\therefore$ م.ع = { ٤ }

(١٢) $\text{لو}_{٤}\ س + \text{لو}_{٤}\ (س + ١٢) = ٣$

$\text{لو}_{٤}\ س(س + ١٢) = ٣ \Leftarrow \text{لو}_{٤}\ (س^{٢} + ١٢ س) = ٣$

$س^{٢} + ١٢ س = (٤)^{٣}$

$س^{٢} + ١٢ س - ٦٤ = (س - ٤)(س + ١٦) = ٠$

$\therefore س = ٤$ $س = -١٦$ (مرفوض) $\therefore$ م.ع = { ٤ }

(١٣) $(\text{لو س})^{٣} = \text{لو س}^{٤}$

$(\text{لو س})^{٣} = ٤\ \text{لو س} \Leftarrow (\text{لو س})^{٣} - ٤\ \text{لو س} = ٠$

$\text{لو س}\ [(\text{لو س})^{٢} - ٤] = ٠ \Leftarrow \text{لو س} = ٠$ أ، $(\text{لو س})^{٢} = ٤$

$\therefore$ س $= ١٠^{\text{صفر}}$ أ، لو س $= |٢|$

$\therefore$ س $= ١$ أ، لوس $= ٢$ أ، لوس $= -٢$

س $= ١٠^{٢} = ١٠٠$ س $= ١٠^{-٢} = ٠,٠١$

$\therefore$ م.ح $= \{١ ، ١٠٠ ، ٠,٠١\}$

(١٤) $(٢)^{(\text{لو س})^{٢}} \times ٦٤ = (٣٢)^{(\text{لو س})}$

$(٢)^{(\text{لو س})^{٢}} \times (٢)^{٦} = (٢^{٥})^{(\text{لو س})} \Leftarrow (٢)^{(\text{لوس})^{٢}+٦} = (٢)^{٥(\text{لو س})}$

$\therefore (\text{لو س})^{٢} + ٦ = ٥\ \text{لو س} \Leftarrow (\text{لو س})^{٢} - ٥\ \text{لو س} + ٦ = ٠$

نحلل: $(\text{لوس} - ٢)(\text{لو س} - ٣) = ٠$

$\therefore$ لو س $= ٢$ أ، لو س $= ٣$

$\therefore$ س $= ١٠^{٢} = ١٠٠$ أ، س $= ١٠^{٣} = ١٠٠٠$

$\therefore$ م.ح $= \{١٠٠ ، ١٠٠٠\}$

(١٥) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ١) = ١

∴ لو$_{٢}$ س (س + ١) = ١ استخدام خاصية (٣)

∴ س (س + ١) = ٢^{١} تحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية

∴ س^{٢} + س - ٢ = صفر ∴ (س + ٢) (س - ١) = صفر

إما س = -٢ أو س = ١ وحيث إن س = -٢ ∉ مجال تعريف المعادلة

∴ مجموعة الحل = {١}

(١٦) لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

لو$_{٣}$ (س - ١) + لو$_{٣}$ (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ لو$_{٣}$ (س - ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ س^{٢} - ١ = ٨ ∴ س^{٢} = ٩ ومنها س = ±٣

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل = {٣}

تدريب :

أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :

١) ٢ لو س - لو (س + ٢) = ٠

٢) لو س^{٢} = لو ٤ + لو ٩

٣) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س - ٢) = ٣

٤) لو س + لو (س + ٢) = لو (س + ٦)

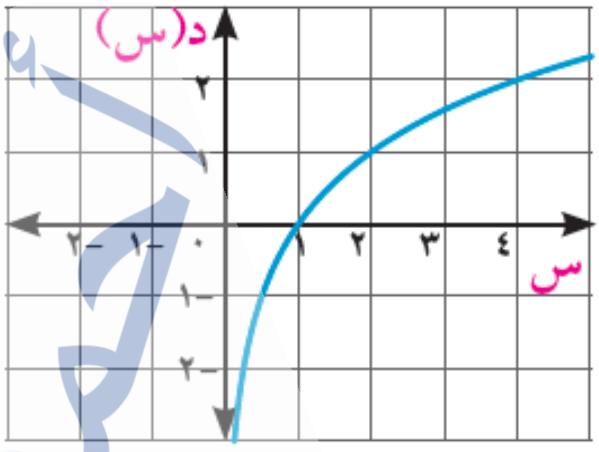
٥) لو $\sqrt{٢س - ١}$ + لو $\sqrt{س - ٢}$ = لو ٣٠ - ١

٦) $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠,٠٧}$ = لو س

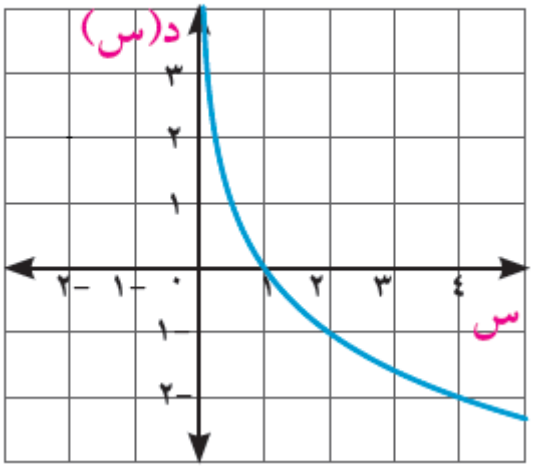
التمثيل البياني للدالة التربيعية

تمثل الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًّا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١

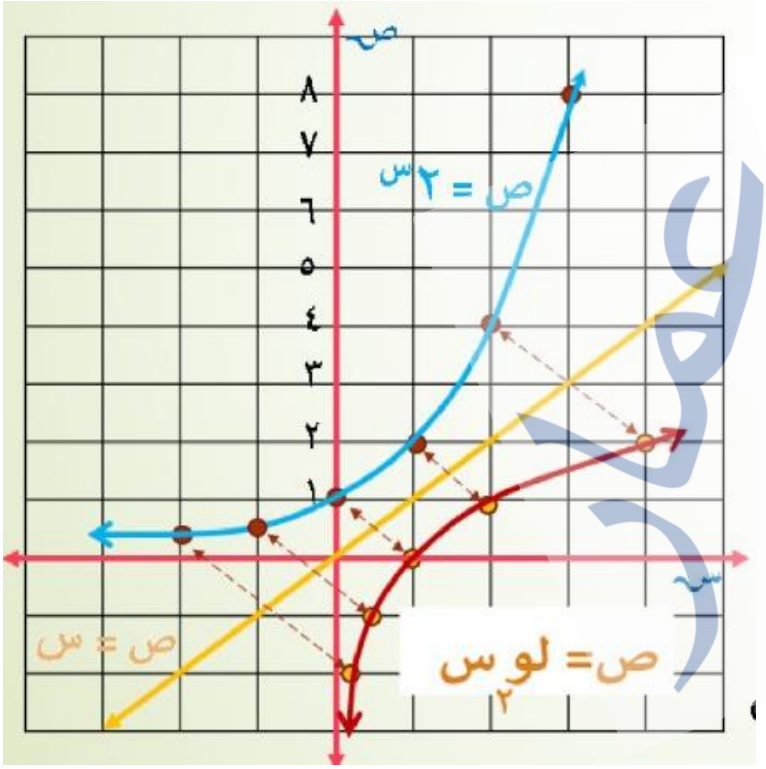


عندما ٠ < أ < ١



منحني الدالة التربيعية يمر بالنقطة (١ ، ٠)

ارسم الدالة ص = لو$_{٢}$ س



أولا نرسم الدالة العكسية وهي

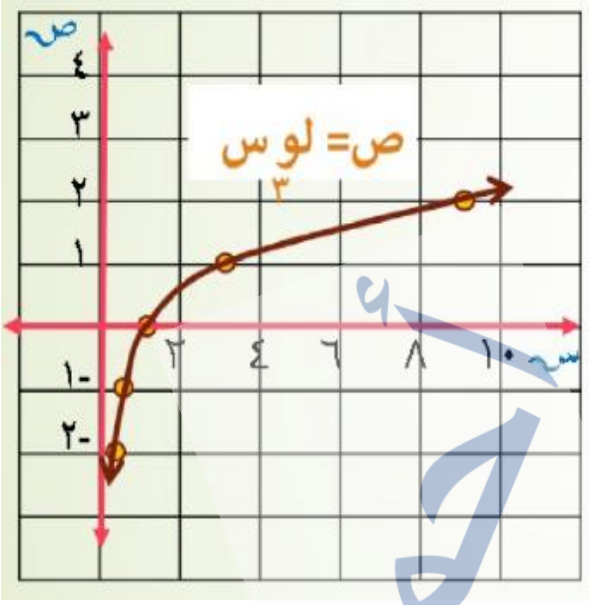
د (س) = ٢^{س}

ثانيا نرسم المستقيم ص = س

ثالثا نعكس منحني الدالة

حول المستقيم ص = س

ارسم الدالة ص = لو س
٣



أولا نرسم الدالة العكسية وهي

د (س) = $٣^{س}$

ص	-٢	-١	٠	١	٢
س	$٣^{-٢}$ = ٠,١	$٣^{-١}$ = ٠,٣	١	٣	٩

ثانيا نرسم المستقيم ص = س

ثالثا نعكس منحني الدالة

حول المستقيم ص = س

- مجال الدالة (قيم س) هي ح+
- مدى الدالة (قيم ص) هي ح

استخدام الآ لة الحاسبة في إيجاد قيمة اللوغاريتم

* مفتاح اللوغاريتم لأى أساس هو [log▯] ، مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو [log]

فمثلًا : ① لإيجاد لو٣ ٢٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار إلى اليمين.

⟶

[log▯] [3] [◯] [2] [4] [=] فيظهر على الشاشة العدد 2.892789261

فيكون لو٣ ٢٤ ≃ ٢,٨٩٢٨ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

② لإيجاد لو ٨,٤ نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار إلى اليمين

⟶

[log] [8] [.] [4] [=] فيظهر على الشاشة العدد 0.9242792861

فيكون لو ٨,٤ ≃ ٠,٩٢٤٣ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.

* المفتاحان [SHIFT] [10^x log] يستخدمان بالتتابع من اليسار لليمين لإيجاد العدد الحقيقى الذى لوغاريتمه المعتاد معلوم فمثلاً : إذا كان لو س = ٠,٤٥٧٢ فلإيجاد العدد س نستخدم مفاتيح الحاسبة بالتتابع الآتى من اليسار إلى اليمين

⟶

[SHIFT] [10^x log] [0] [.] [4] [5] [7] [2] [=]

فيظهر على الشاشة العدد 2.865497276

∴ س ≃ ٢,٨٦٥٥ مقربًا لأربعة أرقام عشرية.